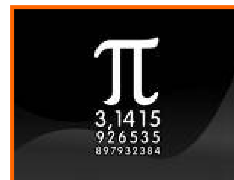
Το π με 1.000.000 ψηφία & η κατανομή τους



Το τυπώνει το επαγγελματικό λογισμικό **Mathematica** , δηλ. **το μεγαλύτερο υπερεργαλείο μαθηματικών στον κόσμο** που κυκλοφορεί ελευθέρως στο εμπόριο. Δεν έκανε πάνω από μισό λεπτό να το τυπώσει σε έναν απλό οικιακό υπολογιστή με επεξεργαστή Celeron 1.700 Hz



Πριν 10 χρόνια διάβαζα έκπληκτος (αλλά ακόμη και τώρα σε κάτι βιβλία που δεν ανανεώνουν την ύλη τους στις επανεκδόσεις τους) ότι «βρέθηκε ο αριθμός π με 1.000.000 ψηφία μετά από μήνες συνεχούς εργασίας πολλών υπερ-υπολογιστών που δούλευαν παράλληλα νυχθημερόν και με έπιανε δέος . Σήμερα τον τυπώνω , μπορώ να τον βρω (στο mathematica) και με 10 εκατομμύρια ψηφία, μάλλον μπορώ και με 100.000.000 ψηφία, αλλά δεν το επιχειρώ, διότι μπορεί να περιμένω κάποιες ώρες (δεν πιστεύω παραπάνω, ας….πειραματιστεί κάποιος άλλος!) Μάλλον θα μου κολλήσει και ο Η/Υ, οπότε δεν το επιχειρώ. Έχω πάντως αρκετά ψηφία για την δουλειά που τον χρειάζομαι!



Για να καταλάβετε, πριν από πάρα πολλά χρόνια είχα διαβάσει, ότι αν επιχειρήσουμε να βρούμε την περίμετρο του σύμπαντος (μέχρι εκεί που έχει φθάσει το φώς από την εποχή «της μεγάλης εκρήξεως) και χρησιμοποιήσουμε μόνο τα 16 πρώτα ψηφία του π , δεν θα κάνουμε λάθος παραπάνω από 6-7 μέτρα (!)

Τι να τα κάνουμε επομένως τα 1.000.000 ψηφία;

Σήμερα έχουμε βρει –κρατηθείτε- 1,24 τρις εκατομμύρια ψηφία του . **Η μόνη πρακτική χρησιμότητά τους είναι ο έλεγχος των υπολογιστικών παραμέτρων ενός υπολογιστή των λογισμικών και των αλγορίθμων .**

Στην αρχή που χρησιμοποιούσα το Mathematica ,με έπιανε ένα άγχος , κάτι σαν τύψεις και ενοχές ! Θα σας πω το γιατί ….. Αν βάλλεις το λογισμικό να σου βρει **πρώτη φορά** πόσο κάνει 1+1 , είναι αλήθεια ότι φαίνεται να ….«το σκέφτεται αρκετά!» , και μετά από 3-4 δευτερόλεπτα , σου βγάζει….σωστό αποτέλεσμα , δηλ. το 2 . Αν αμέσως μετά το ρωτήσεις πόσο κάνει λ.χ. 125! , δεν θα προλάβεις να πατήσεις Σιφτ +Εντερ και θα πάρεις το αποτέλεσμα σε χιλιοστά του δευτερολέπτου (Αν είναι κάτω από 1/10 sec –χρόνος του λεγόμενου μετεικάσματος- δεν

προλαβαίνεις ούτως ή άλλως να το αντιληφθείς !) Αν το ρωτήσεις πόσο κάνει 1.250.000! θα «δυσκολευθεί» αφού θα χρειασθεί να «σκεφθεί» κάποια ελάχιστα δευτερόλεπτα ! **Πάντως οι τύψεις για το ότι βρίσκεις *«έτσι χωρίς ιδιαίτερα σπουδαίο λόγο»* αποτελέσματα που πριν κάτι χρόνια έπρεπε να δουλεύουν νυχθημερόν με κομπιουτεράκια χιλιάδες άνθρωποι για δεκάδες χρόνια (κι ΑΝ το έβρισκαν και σωστά δηλαδή!) δεν λένε να μου φύγουν ακόμα και τώρα!**

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{8}\right)+\arctan\left(\frac{1}{18}\right)+\cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$\pi = \lim_{k\to\infty} 2^k \tan\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$$

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\times\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\times\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)}\right)}\times\cdots}$$

Ως γνωστόν, το π είναι ένας αριθμός **άρρητος** Αυτό σημαίνει, ότι έχει άπειρα δεκαδικά ψηφία που δεν είναι όλα από κάποια θέση και πέρα όλα 0 ή όλα 9 ή δεν επαναλαμβάνεται περιοδικά στο διηνεκές κάποιο μέρος των ψηφίων του. Αυτό δεν σημαίνει ότι δεν μπορούν να έχουν και κάποια τάξη τα ψηφία του ή μια κανονικότητα ή να ακολουθούν κάποιο κανόνα παραγωγής . Για παράδειγμα μετά από ένα αριθμό ψηφίων θα μπορούσε να λείπει ο αριθμός 5 . Ο π θα εξακολουθούσε να είναι άρρητος με κάποια «τάξη» (το 5 θα το εμφάνιζε στην ακολουθία των ψηφίων του πεπερασμένες φορές και άπειρες όλα τα άλλα ψηφία) Αν τώρα κάποιος μας πει «αντικαθιστώ όλα τα ψηφία του π που είναι ίσα με 5 με το 9» Τι αριθμός θα προκύψει; Ρητός ή άρρητος;» (Ας το σκεφθεί ο αναγνώστης πριν πάει στην υποσημείωση[1])

Γενάται το ερώτημα:

Τα ψηφία του π εμφανίζονται με κάποια κανονικότητα μέσα στην άπειρη ακολουθία ; Εμφανίζονται τυχαία; Πόσο τυχαία; Ισοκατανέμονται ; Ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή; Υπάρχει τρόπος να το διαγνώσουμε;

Ας προσεγγίσουμε τα παραπάνω ερωτήματα:

Κατά πρώτον τα ερωτήματα έχουν απαντηθεί και δεν περιμένουν την παρούσα εργασία!

$$\pi = 4\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$$

$$= \sqrt{6\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\right)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{8n+1}-\frac{2}{8n+4}-\frac{1}{8n+5}-\frac{1}{8n+6}\right)\left(\frac{1}{16}\right)^n$$

Ναι, τα ψηφία κατανέμονται τυχαία και η ακολουθία των ψηφίων του π μπορεί να χρησιμοποιηθεί , ως γεννήτρια τυχαίων αριθμών . το μόνο πρωτότυπο που θα κάνουμε εδώ είναι να τα απαντήσουμε με την βοήθεια του…..Word (!!!)

Βεβαίως, μελετάμε

---

[1] Δεν γνωρίζουμε. Υπάρχει το ενδεχόμενο, τα ψηφία του π , από μία τάξη ψηφίου και πέρα να είναι όλα 5 ή 9 . Αν τότε αντικαταστήσουμε το 5 με 9, θα μας προκύψει ρητός περιοδικός με περίοδο το 9 . Σε κάθε άλλη περίπτωση θα εξακολουθήσει να είναι άρρητος. Γενικώς όμως, δεν γνωρίζουμε.

τα 1.000.000 πρώτα ψηφία του π . Δεν ξέρουμε (φυσικά!) τα άπειρα. **Εικάζουμε** ότι η στατιστική συμπεριφορά που έχει η ακολουθία για τα πρώτα 1 εκατ. Ψηφία του είναι ίδια και για τα επόμενα 9 εκατομμύρια ψηφία του (όντως είναι!) και ίδια για τα επόμενα 1 τετράκις εκατομμύριο ψηφία (ενημέρωση 2004) Αλλά ότι θα είναι ίδια και για τα επόμενα άπειρα ψηφία του , αυτό μόνο ο…. Θεός το ξέρει!

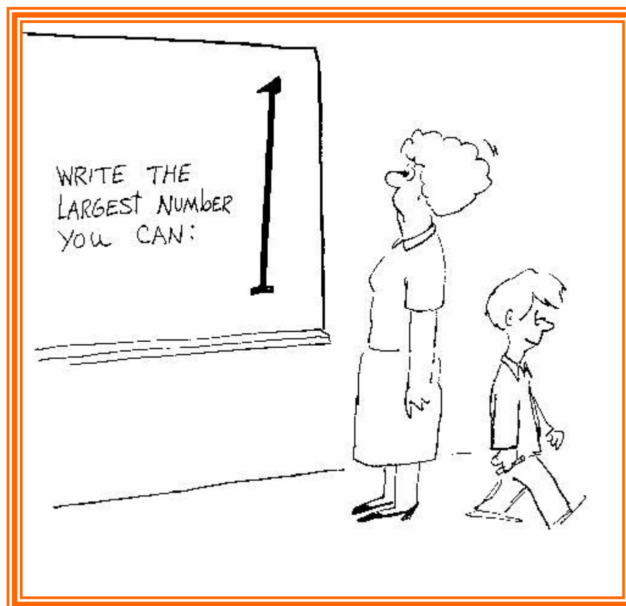
Τα σίγουρα που γνωρίζουμε για το π , είναι ότι είναι αριθμός **άρρητος** (εξηγήσαμε παραπάνω τι σημαίνει αυτό) και επίσης είναι αριθμός **υπερβατικός,** δηλαδή, «**<u>δεν μπορεί να προκύψει ως ρίζα πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές (ισοδυνάμως και ρητούς συντελεστές)</u>»**

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi$$

Πιο πρακτικά το προηγούμενο σημαίνει, ότι το π δεν μπορεί να παρασταθεί ως μια αλγεβρική παράσταση που να έχει ρητούς και ριζικά οιασδήποτε τάξεως (με υπόρριζες ποσότητες ρητούς) και δεν είναι κατασκευάσιμος με κανόνα και διαβήτη . Να αντιπαραθέσουμε στο προηγούμενο, ότι και το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος (το έχει αποδείξει ο Ευκλείδης) πλην όμως κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη (υποτείνουσα ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου με κάθετες πλευρές μονάδες) και δεν είναι υπερβατικός, αφού είναι ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης π.χ. $\chi^2-2=0$

$$\pi = \frac{\overset{338 \qquad 1016 \qquad 940}{\text{ΜΗΚΟΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ ΚΥΚΛΟΥ}}}{\underset{730}{\text{ΔΙΑΜΕΤΡΟΣ}}} = \frac{2294}{730} = 3{,}14\ldots$$

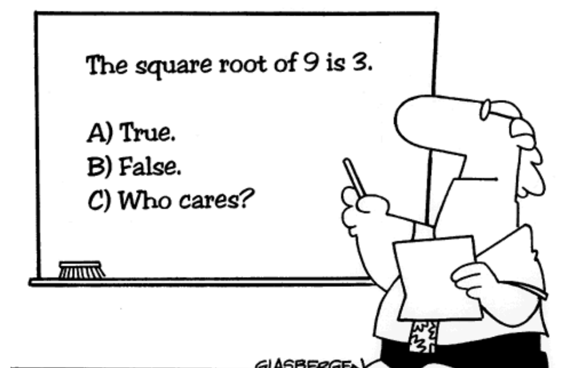
Οι αποδείξεις για την υπερβατικότητα και την αρρητότητα του π υπάρχουν στην παρούσα ιστοσελίδα <u>**(ΕΔΩ)**</u> και μπορεί κάποιος να διαβάσει τις (μάλλον δύσκολες) αποδείξεις .Ας μην ξεχνάμε, ότι το πρόβλημα που ταλάνιζε την μαθηματική κοινότητα κάτι αιώνες ήταν ο τετραγωνισμός του κύκλου, πράγμα που έγινε γνωστό μόλις το 1882 από τον **Λίντενμαν (Δεν μπορεί να κατασκευαστεί με κανόνα και διαβήτη τετράγωνο εμβαδού ίσου με το εμβαδόν δοθέντος κύκλου , επειδή το π είναι υπερβατικός αριθμός)**



$$\pi = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

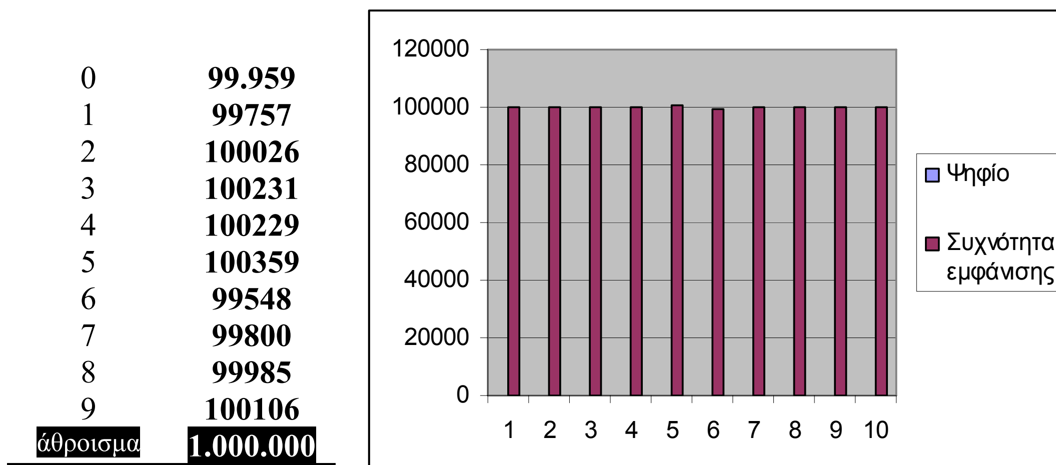
Στην κλασσική ευκλείδεια Γεωμετρία, αν έχεις ένα ν-γωνο, μπορείς εύκολα να κατασκευάσεις ένα (ν-1)-γωνο με το ίδιο εμβαδόν (πολύγωνο με μια πλευρά λιγότερη) με αυτή την λογική, οποιοδήποτε ν-γωνο, τελικά, μετά από πεπερασμένα βήματα, ανάγεται σε τρίγωνο ιδίου εμβαδού. Στην συνέχεια, το τρίγωνο, είναι εύκολο να γίνει

παραλληλόγραμμο ιδίου εμβαδού και το παραλληλόγραμμο να γίνει τετράγωνο ιδίου εμβαδού (εκμεταλλευόμαστε, ότι το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου, ισούται με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πλευρών στην υποτείνουσα)



Τελικώς: Κάθε ν-γωνο, ανάγεται σε τετράγωνο ίσου εμβαδού . Λογικό ήταν να αναζητηθεί η αναγωγή και σε κύκλο ιδίου εμβαδού κάτι που βασάνισε επί πολύ πολλούς μαθηματικούς , επηρέασε όσο τίποτα την εξέλιξη των μαθηματικών και υπάρχει μια τεράστια φιλολογία επ΄ αυτού και αντίστοιχη μαθηματική βιβλιογραφία.

Πάντως το «αστείο» (ή και τραγικό ανάλογα με την οπτική) της όλης υπόθεσης , είναι, <u>ότι ενώ έχει αποδειχθεί πέραν πάσης αμφιβολίας από το 1882 ,</u> ότι δεν κατασκευάζεται κύκλος ιδίου εμβαδού με δοθέν τετράγωνο με κανόνα και διαβήτη , εκατοντάδες «τρελοί επιστήμονες» αυτή την στιγμή , ισχυρίζονται ότι το ….πέτυχαν! Βεβαίως (αν αναφερθούμε στις πιο «σοβαρές» περιπτώσεις) αυτό μπορεί να επιτευχθεί πολλαπλώς, αλλά με την βοήθεια **<u>άλλου οργάνου , πάντως όχι κανόνα και διαβήτη</u>.** Αυτό μπορεί να μην είναι εμφανές σε κάποιον που δεν είναι επαρκώς υποψιασμένος διότι αν ακούσει λ.χ. την έκφραση «έστω η παραβολή $y=x^2$, δεν σκέπτεται αυτομάτως ότι αυτή δεν κατασκευάζεται με κανόνα και διαβήτη![2] Αυτό μπορεί να είναι μια αφετηρία λάθους. Και βεβαίως, όταν ξεκινάς από λάθος υπόθεση, με λογικά βήματα καταλήγεις σε λάθος συμπέρασμα. Αν λοιπόν κάποιος παρακολουθήσει τα αποδεικτικά βήματα μιας τέτοιας «απόδειξης» δεν θα βρει λάθος στα βήματα , αλλά αυτό συνήθως υπάρχει στις παραδοχές , **οι οποίες παραδοχές υποκρύπτουν τον κανόνα και τον διαβήτη** Υπενθυμίζω, ότι έχει αποδειχθεί κάτι **ισχυρότερο:** <u>«Οποιαδήποτε γεωμετρική κατασκευή πραγματοποιείται με κανόνα και διαβήτη, μπορεί να κατασκευασθεί **μόνο με διαβήτη**» (*θεώρημα του* ***Mohr-Mascheroni***)</u>



0	**99.959**
1	**99757**
2	**100026**
3	**100231**
4	**100229**
5	**100359**
6	**99548**
7	**99800**
8	**99985**
9	**100106**
άθροισμα	**1.000.000**

[2] Προσοχή! Άλλο να κατασκευάσεις πεπερασμένα σημεία μιας παραβολής και άλλο την ίδια την παραβολή που έχει το σύνολο των σημείων που πληρούν τον γνωστό ορισμό.

Το παραπάνω ιστόγραμμα είτε ο πίνακας, εκφράζουν ότι η συχνότητα εμφάνισης των πρώτων 1.000.000 ψηφίων του π , είναι **σχεδόν ίδια** για όλα τα ψηφία .
Αν κάνουμε και μια δοκιμή για το αν λ.χ. το ψηφίο 5 είναι «ισοπίθανο» για εμφάνιση σε κάθε θέση μπορούμε να βρούμε την εμφάνιση των αριθμών 5, 55, 555, 5555,55555,555555,5555555 . Αν είχαμε ισοπιθανότητα εμφάνισης τότε για μεν το 5 αναμένουμε συχνότητα εμφάνισης 100.000 (στην πραγματικότητα 100.359) για το 55 συχνότητα 10.000 , για το 555 συχνότητα 1000 , για το 5555 συχν. 100 κ.ο.κ.

Πράγματι, έτσι συμβαίνει, διότι αν μετρήσουμε τις εμφανίσεις των παραπάνω στοιχείων μέσω της εντολής του Word **«εύρεση του 55»** και **«αντικατάστασή του με 55»** τότε θα μας δώσει και την συχνότητά εμφάνισής του.

αριθμός	Συχνότητα	αριθμός	Συχνότητα
5	100.359	1	**99757**
55	9.175	12	**9612**
555	915	123	**950**
5555	86	1234	**73**
55555	13	12345	**8**
555555	3	123456	**0**

αριθμός	Συχνότητα
6	**99548**
35	**10061**
489	**991**
2647	**92**
09631	**9**
562379	**0**

Ελέγχουμε για λίγους τυχαίους και εικάζουμε για όλους

Όλοι οι τετραψήφιοι ακέραιοι αντιστοιχίζονται σε συχνότητες περί το 100

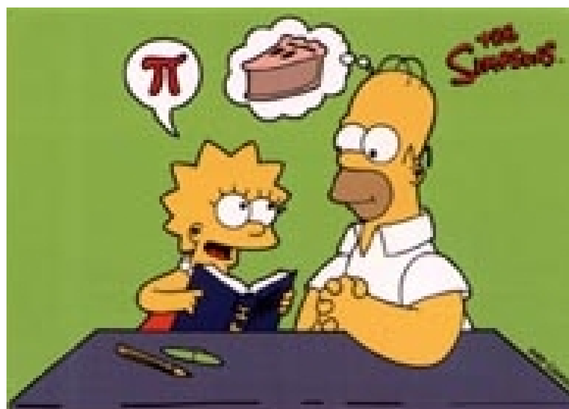
1970 →104 , 2006→91 , 1821→102 , 1453→123 , 1940→89 , 1974→115 Δηλαδή, η χρονολογία γεννήσεώς σας εμφανίζεται γύρω στις 100 φορές.

Όλα οι πενταψήφιοι σε συχνότητες περί το 10:

50.000→16 , 45678→6 , 12345→8 , 78945→15 , 14258→9

Όλοι οι εξαψήφιοι σε συχνότητες περί το 1

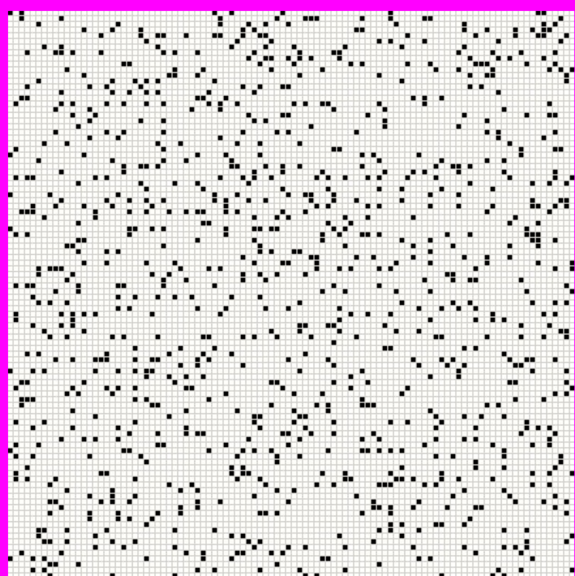
281040→0 , 110901→0 , 250321→0 130974 →1 010101→2 Αν είστε τυχερός, μπορεί να βρείτε μία φορά και την χρονολογία γεννήσεώς σας, όπως απαιτεί να την γράφετε ο τύπους της «Υπεύθυνης



Είναι γνωστή- η μάλλον γελοία- εμμονή των Αγγλόφωνων στην προφορά του «π» ως «πάϊ» (πίτα) και όχι ως «πι»

Δήλωσης του Ν.1599» δηλ. ως εξαψήφιο αριθμό όπου λ.χ. η ημερομηνία 2 Οκτωβρίου 1983 γράφεται ως 021083 .

Όλα τα παραπάνω, μας πείθουν, ότι τα ψηφία του π είναι όντως ισοπίθανα και κατανέμονται τυχαία. Λέγοντας «μας πείθουν» εννοούμε ως εύπιστα όντα, διότι **αυτό που ισχύει για το πεπερασμένο, δεν ισχύει απαραιτήτως για το άπειρο**. Μπορεί, ο αριθμός π , μετά από το 1 δεκάκις εκατομμυριοστό του ψηφίο να εμφανίζει όλα τα υπόλοιπα στοιχεία πλην λ.χ του 5 . Μπορεί να εμφανίζει περίεργη συμπεριφορά στην κατανομή των ψηφίων του. Αυτό κανείς δεν μπορεί να μας το βεβαιώσει ή να μας το διαψεύσει (Μέχρι στιγμής τουλάχιστον, εκτός αν ανακαλύψουμε συνταρακτικές μαθηματικές προτάσεις για την φύση των αρρήτων μεγεθών)



Η παραπάνω εικόνα δείχνει την κατανομή του ψηφίου 1 στα 10.000 πρώτα ψηφία. Σας φαίνεται τυχαία;

Πάντως, είτε το π εμφανίζει ισοπίθανη τυχαιότητα κατανομής στα ψηφία του (όπως απλώς εικάζουμε) είτε όχι , τότε η πιθανότητα να πετύχουμε έναν οσοδήποτε μεγάλο αριθμό ανάμεσα στα δεκαδικά ψηφία του, είναι 1 (100% δηλαδή, βέβαιο γεγονός) αφού οι «δοκιμές» είναι άπειρες και οι πιθανότητα εμφάνισης κάθε ψηφίου θετική.

Αν ο ….Θεός , αποκαλύψει ότι υπάρχει ένας πολύ μεγάλος συγκεκριμένος αριθμός στην ακολουθία των ψηφίων του π, (βέβαιο ενδεχόμενο) δεν είναι και πρακτικά εφικτό να τον βρεις, αφού αυτός για πρώτη φορά μπορεί να εμφανίζεται από ένα σημείο και πέρα που δεν το έχει βρει ακόμα ο άνθρωπος και αυτό το σημείο μπορεί να είναι οσοδήποτε μεγάλο. Οι πιθανότητες με τα απειροσύνολα μπορούν να εμφανίζουν παράδοξα . Για παράδειγμα, αν τμήσω το ευθύγραμμο τμήμα –διάστημα [0,1] τυχαία με μια ευθεία, η πιθανότητα να πετύχω ρητό αριθμό είναι ….μηδέν (αδύνατον!) ενώ οι υπάρχοντες ρητοί στο διάστημα [0,1] είναι άπειροι! Επαναλαμβάνω, ότι αυτό μοιάζει απίστευτο , αλλά αν ορίσουμε **φυσιολογικά –γεωμετρικά,** ως πιθανότητα να εμφανιστεί ρητός :

$$P(\rho\eta\tau\acute{o}\varsigma\,\sigma\tau o[0,1])=\frac{\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o(\mathbb{Q}\cap[0,1])}{\mu\acute{\varepsilon}\tau\rho o([0,1]-\mathbb{Q})}=\frac{0}{1}=0$$

Κάποιος μπορεί να εγείρει αντιρρήσεις φιλοσοφικού τύπου στο προηγούμενο, αλλά η αλήθεια είναι, ότι **«σχεδόν όλοι οι αριθμοί είναι άρρητοι»** Η εξωμαθηματική έκφραση **«σχεδόν όλοι»** φαίνεται αντιφατική με την πιθανότητα μηδέν. Για να κάνουμε κατανοητό το προηγούμενο, πρέπει να φέρουμε στο μυαλό μας ορισμένες αλήθειες που το πεπερασμένο ανθρώπινο μυαλό δεν μπορεί να παραδεχθεί απ΄ την ίδια την φύση του και να δώσουμε επί πλέον επιχειρήματα:
Αν φανταστούμε ένα σακούλι με όλους τους φυσικούς αριθμούς (άπειρους) τότε η εκ των προτέρων πιθανότητα με μία εξαγωγή να πετύχω τον αριθμό 5 είναι $\frac{1}{\infty}=0$.

Αλλά και

$$100000^{100000^{100000^{100000^{100000^{100000^{100000^{100000^{100000^{100000}}}}}}}}}$$

εξαγωγές να κάνω πάλι η πιθανότητα είναι μηδέν. Τον προηγούμενο φυσικό, παρ΄ ότι έχω χρησιμοποιήσει μικρό χώρο για να τον παραστήσω, δεν υπάρχει άνθρωπος που να μπορεί να φανταστεί ούτε καν την τάξη του, ούτε κάν το πόσο πολλαπλάσιο είναι του αριθμού των στοιχειωδών σωματιδίων που υπάρχουν στο Σύμπαν[3]. Αυτό ας θεωρηθεί βέβαιον χωρίς….απόδειξη! Απλώς, πρέπει να γίνει κατανοητό, ότι όπως από το πεπερασμένο **μεταπηδούμε σε ποιότητα** αναφερόμενοι στο άπειρο, έτσι και από το άπειρο αριθμήσιμο των ρητών ($\aleph_0$:=Άλεφ μηδέν) όταν μεταπηδούμε στο άπειρο υπεραριθμήσιμο των αρρήτων που υπάρχουν στο [0,1] , $\aleph_1$ (Άλεφ ένα) αλλάζουμε ανάλογη ποιότητα. Όμως , η πιθανότητα μηδέν , δεν οφείλεται στην μεταπήδηση τάξεως του απείρου, αλλά στα διαφορετικά μέτρα , δεδομένου, ότι και το σύνολο Cantor[4] έχει υπεραριθμησιμοτητα μεν, αλλά μέτρο μηδέν.

---

[3] Όταν από κεκτημένη ταχύτητα φτιάχνουμε εικόνες για να κατανοήσουμε το άπειρο, πέφτουμε σε λάθη εκ των προτέρων. Για παράδειγμα, όταν φανταζόμαστε μια κληρωτίδα με ένα σακούλι που έχει άπειρους αριθμούς μέσα, πρέπει να αντιληφθούμε, ότι δεν υπάρχει υλικό τέτοιο σακούλι, αφού, οσοδήποτε μικρές διαστάσεις και να έχει κάθε αριθμός, ακόμα και ψηφιακή μορφή, πρέπει ο δίσκος να είναι άπειρης χωρητικότητας, δηλαδή άπειρου υλικού όγκου. Η μαθηματική αφαίρεση και τα μαθηματικά αντικείμενα, δεν έχουν ταύτιση με τα φυσικά αντικείμενα , παρ ότι μέσω των πρώτων συνήθως προσεγγίζουμε τα δεύτερα με όση ακρίβεια θέλουμε.

[4] Το σύνολο του Cantor πρέπει να το φανταστεί κάποιος ως εξής: Χωρίζω το [0,1] σε τρία ίσα κομμάτια πετάω το μεσαίο και κρατάω τα άλλα δύο. Κάθε ένα από τα δύο το χωρίζω σε τρία ίσα κομμάτια, πετάω το μεσαίο και κρατάω τα δύο άλλα. Αυτή την διαδικασία την συνεχίζω επ΄ άπειρον και το σύνολο που προκύπτει λέγεται σύνολο του Cantor. Αυτό είναι ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο, αλλά έχει μέτρο κατά Λεμπέγκ μηδέν.

Των παραπάνω δοθέντων, συνάγομε , **ότι δεν ξέρουμε «σχεδόν τίποτα» για τα ψηφία του π , αφού είναι άπειρα**. Μάλιστα αν θέσουμε στο μαθηματικό μικροσκόπιο την έκφραση «σχεδόν τίποτα» θα δούμε ότι το σωστό είναι ότι **«δεν ξέρουμε τίποτα»,** αφού τα ψηφία του π είναι άπειρα στο πλήθος, μη περιοδικά και όταν εμείς γνωρίζουμε ένα τεράστιο πεπερασμένο κομμάτι των ψηφίων του, ως κλάσμα επί του συνόλου , απλώς δεν γνωρίζουμε ….τίποτα!

Προτεινόμενοι σύνδεσμοι στο διαδίκτυο:

1. **http://thestarman.dan123.com/math/pi/RandPI.html**
2. **http://www.answers.com/topic/pi**
3. **http://thestarman.dan123.com/math/pi/index.html**
4. **http://www.geocities.com/thanostasios/pi.html**

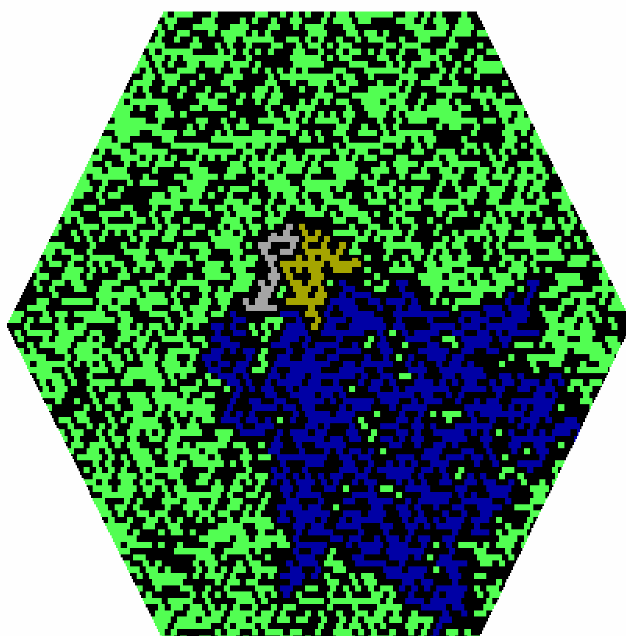
http://el.wikipedia.org/wiki/%CE%91%CF%81%CE%B9%CE%B8%CE%BC%CF%8C%CF%82_%CF%80

5. **http://www.mathpages.com/home/kmath519.htm (για το e και για το π , αν είναι «κανονικοί»)**
6. **(Και μια «λύση» του τετραγωνισμού του κύκλου με κανόνα και διαβήτη) http://www.alkyone.com/mak-pi-gr/gr/gr_release.htm**

Ψηφίο	Συχνότητα εμφάνισης των δεκαδικών ψηφίων στα πρώτα 4,2 δισεκατομμύρια ψηφία του π .
6	**420.033.987**
9	**420.011.183**
4	**420.007.057**
1	**420.006.394**
0	**420.003.528**
8	**420.001.484**
7	**419.996.867**

5	**419.989.094**
3	**419.978.657**
2	**419.971.749**

Το παρακάτω περίεργο εξαγωνικό σχήμα έχει κατασκευαστεί με βάση την δυαδική ανάπτυξη των ψηφίων του π πάνω σε ένα καμβά που έχει την ίδια δομή με το κτίσιμο μονότουβλων και έχουν διαταχθεί σπειροειδώς (50 φορές) το σχήμα το ονομάζουν «Η κυρία π» και ο κατασκευαστής του ισχυρίζεται, ότι βλέπει μια γυναικεία μορφή . Προσωπικώς αδυνατούμε να την δούμε, αλλά αν την δείτε , παρακαλώ να μας το διαμηνύσετε!



Συχνότητα εμφάνισης ψηφίων στα πρώτα 10.000.000 ψηφία του π.
(Η ομοιόμορφη κατανομή είναι προφανής)

0	**999440**
1	**999333**
2	**1000306**
3	**999965**
4	**1001093**
5	**1000466**
6	**999337**
7	**1000206**
8	**999814**
9	**1000040**

Τρισεκατομμύρια ψηφία του π

(Να σημειώσω, ότι το παρακάτω κείμενο, έχει μεταφραστεί μηχανικά επί γραμμής από τον δικτυότοπο της AltaVista από το δωρεάν προσθήκη λογισμικού lingo που αποτελεί πρόσθετο στον σελιδομετρητή FireFox 2.0 .Το παραθέτω επίτηδες για να διαπιστώσετε ιδίοις όμμασιν την ποιότητα της μετάφρασης. Έχουν διορθωθεί 6-7 λέξεις μόνο, κάποιοι σολοικισμοί)

Ο επιστήμονας υπολογιστών Yasumasa Kanada και οι συνάδελφοί του στο πανεπιστήμιο του κέντρου τεχνολογίας πληροφοριών του Τόκιο πέτυχαν το 2002 στον υπολογισμό 1.241.100.000.000 δεκαδικών ψηφίων του π, συνθλίβοντας το προηγούμενο παγκόσμιο αρχείο 206.158.430.000 ψηφίων τους, που επετεύχθη το 1999. Ο υπολογισμός απαίτησε περίπου 602 ώρες σε έναν υπολογιστή Hitachi SR8000, με την πρόσβαση σε μια μνήμη περίπου 1 terabyte. (1 τέρα=1000γίγα)

Για να υπολογίσουν τα ψηφία του π, ο Kanada και η ομάδα του, χρησιμοποίησαν τους τύπους που περιλαμβάνουν τις arctangent σχέσεις του π (τόξο εφαπτομένης) . Παραδείγματος χάριν, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την ακόλουθη έκφραση για να επιλύσετε την αξία του arctangent *του X* σε οποιοδήποτε επιθυμητό αριθμό δεκαδικών θέσεων ακριβώς με τον υπολογισμό της σειράς σε έναν αρκετά μεγάλο αριθμό όρων:

$$\text{Arctangent}(x) = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + x^9/9 - \dots$$

Η τιμή του π μπορεί έπειτα να ληφθεί από την ακόλουθη εξίσωση:

π = 16 arctangent (1/5). 4 arctangent (1/239).

Με τη χρησιμοποίηση δύο διαφορετικών τύπων, οι ερευνητές ήταν σε θέση να συγκρίνουν τα αποτελέσματα και να πιστοποιήσουν την ακρίβεια του υπολογισμού.

Οι βελτιώσεις στον αλγόριθμο υπολογιστών που χρησιμοποιήθηκε για τον κύριο υπολογισμό συνέβαλαν επίσης στον άθλο. Ο Kanada υπολογίζει ότι εάν η νέα έκδοση του αλγορίθμου είχε εφαρμοστεί το 1999 για να υπολογίσει 206 δισεκατομμύριο ψηφία του π, ο συνολικός χρόνος υπολογισμού στον ίδιο υπολογιστή θα είχε διαρκέσει από 83 έως 38 ώρες.

Το 1,241,100,000,000th δεκαδικό ψηφίο του pi (που δεν μετρά το αρχικό ψηφίο, 3) είναι 5. Kanada έχει αρχίσει να αναλύει τη στατιστική διανομή των ψηφίων του pi και τα απεσταλμένα προκαταρκτικά αποτελέσματα ευρίσκονται σε http://www.super-computing.org/pi-decimal_current.html. Η προσδοκία είναι ότι κάθε ένα από τα ψηφία από 0 έως 9 πρέπει να εμφανιστεί για το ένα δέκατο του χρόνου. Με άλλα λόγια, θα αναμένατε το ψηφίο 7 για να εμφανιστείτε 80 δισεκατομμύριο φορές μεταξύ των πρώτων 800 δισεκατομμύριο ψηφίων του pi. Εμφανίζεται πραγματικά 79.999.775.965 times.close η αναμενόμενη αξία.

Εδώ είναι τα πλήρη αποτελέσματα του Kanada για τα πρώτα 800 δισεκατομμύριο ψηφία:

Ψηφίο	Συχνότητα

1	79.999.983.991
2	80.000.456.638
3	79.999.778.661
4	80.000.238.690
5	79.999.773.551
6	79.999.935.320
7	79.999.775.965
8	80.000.650.170
9	79.999.802.555

Δεν είναι ακόμα αρκετά να τεθούν ερωτήσεις για την κατανομή και το προφανές τυχαίο των ψηφίων του π.

Κανείς δεν μπορεί να μας διαβεβαιώσει, ότι τα ψηφία έχουν άπειρη συχνότητα εμφάνισης και όχι πεπερασμένη.

Κανένας δεν μπορεί ακόμα να αποκλείσει τη δυνατότητα ότι από κάποιο σημείο πέρα από τη σειρά των τρεχόντων υπολογισμών της αξίας του π, τα δεκαδικά ψηφία του επανέρχονται σε μια σειρά που περιορίζεται, για παράδειγμα, μόνο στα ψηφία 1 και 0.

Απομνημόνευση των ψηφίων του π

Ιάπωνας Έσπασε το Παγκόσμιο Ρεκόρ Αποστήθισης Ψηφίων του Αριθμού "π"

πληροφορίες: Ελευθεροτυπία

δημοσίευση: 4 Ιουλίου, 2005

Ένας Ιάπωνας, ο Ακίρα Χαραγκούτσι, 59, από τη Τσίμπα (Chiba), έσπασε το παγκόσμιο ρεκόρ λέγοντας απ' έξω τα περισσότερα από τα άπειρα δεκαδικά ψηφία του αριθμού **π**…([5]) Συγκεκριμένα ο Χαραγκούτσι είπε από μνήμης, και χωρίς να σταματήσει καθόλου, τα πρώτα 83.431 ψηφία μετά την υποδιαίρεση του αριθμού **π**……. Ο Ακίρα Χαραγκούτσι ξεκίνησε την απαγγελία αργά το βράδυ της Παρασκευής (1 Ιουλίου 2005) και τέλειωσε στα 83.431 δεκαδικά ψηφία νωρίς το πρωί του Σαββάτου.

Το μέχρι τώρα Ρεκόρ Γκίνες κατείχε ένας άλλος Ιάπωνας, ο οποίος είχε απαριθμήσει 42.195 ψηφία όταν ήταν φοιτητής στο κολλέγιο.

Διάφοροι τύποι για το π

[5] **Σημείωση δική μας: Πόσα άραγε είναι τα περισσότερα ψηφία από τα ….άπειρα;**

- **Gregory Series** $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{5}$

- $$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{4n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{4n-3}\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{2n(2n+1)(2n+2)} == \frac{3-\pi}{4}$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

- $$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(-1)^k 3^{\frac{1}{2}-k}}{2k+1} = \pi$$

- $$\sum_{n=1}^{\infty} \cot^{-1} F_{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

- $$\sum_{k=0}^{\infty} (4k+1)(-1)^k \left(\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right)^3 = \frac{2}{\pi}$$

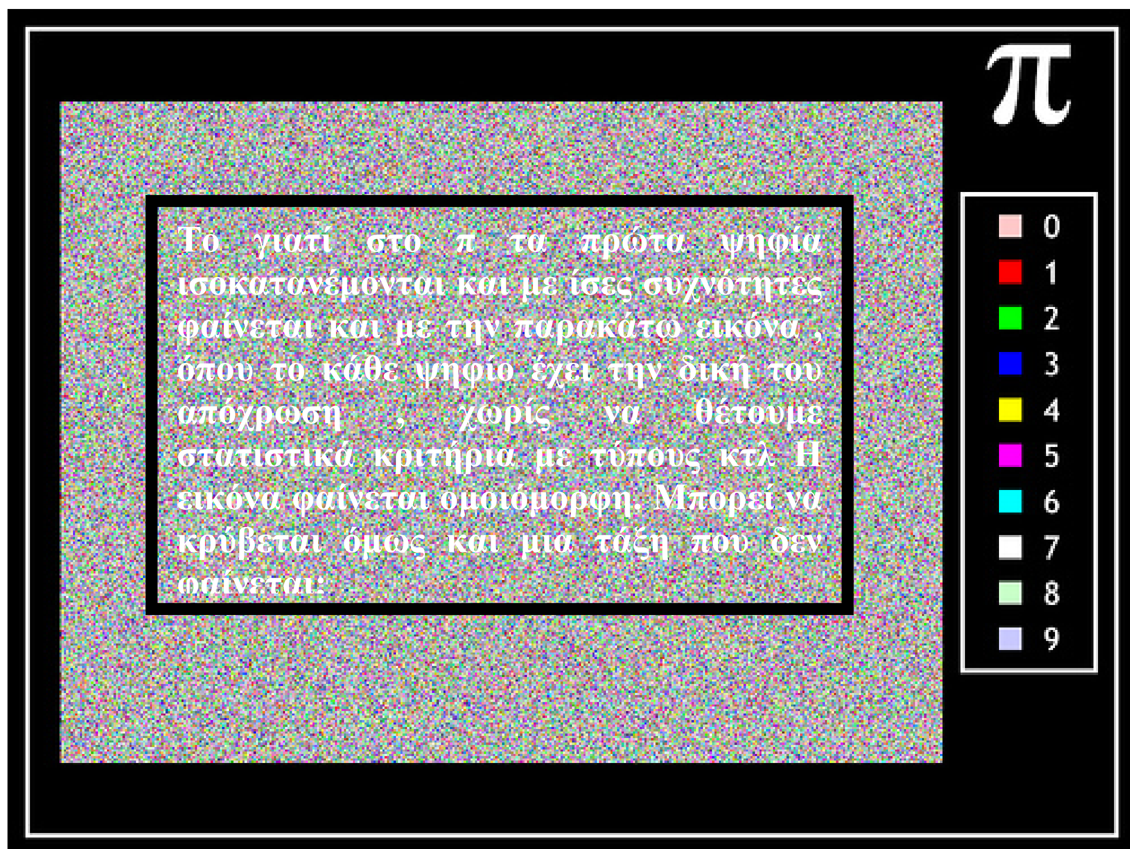
- $$\frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!\,(26390\,n+1103)}{(n!)^4\,396^{4n}} = \frac{1}{\pi}$$

- $$\sqrt{8} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!\,(26390\,n+1103)\,(2n-1)!!\,(4n-1)!!}{99^{4n+2}\,32^n\,(n!)^3} = \pi$$

- $$\frac{1}{740025}\left(-20379280 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{7n}{2n} 2^{n-1}} \left(3\left(-885673181\,n^5 + 3125347237\,n^4 - 2942969225\,n^3 + 1031962795\,n^2 - 196882274\,n + 10996648\right)\right)\right) = \pi$$

- $$12 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(6k)!\,(545140134\,k+13591409)}{(3k)!\,(k!)^3\,640320^{3k+3/2}} = \frac{1}{\pi}$$

- $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16}\left(\frac{\binom{2n}{n}}{16^n}\right)^3 (42\,n+5) = \frac{1}{\pi}$$


π
Το γιατί στο π τα πρώτα ψηφία ισοκατανέμονται και με ίσες συχνότητες φαίνεται και με την παρακάτω εικόνα , όπου το κάθε ψηφίο έχει την δική του απόχρωση , χωρίς να θέτουμε στατιστικά κριτήρια με τύπους κτλ Η εικόνα φαίνεται ομοιόμορφη. Μπορεί να κρύβεται όμως και μια τάξη που δεν φαίνεται:
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9